臺北市立松山高級中學 105 學年度第二學期 第一次期中考

三年級自然組 數學科試題卷

一、單選題

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確的選項，請將正確選項填寫在答案卷上。

各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或填寫多於一個選項者，該題以零分計算。

(　　　　) 1. 請問極限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^5-4x^4+2x^3-x^2+2x+1}{x^2-1}$ 為下列哪一個選項？

(1) 1

(2) 2

(3) -1

(4) 0

(5) 不存在

(　　　　) 2. 請問極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n}-4^{2n}}{2^{4n}+9^n}$ 為下列哪一個選項？

(1) 1

(2) 0

(3) -1

(4) $-\dfrac{4}{9}$

(5) 不存在

(　　　　) 3. 已知搭乘臺北市捷運票價區間計費方式如下：

搭乘里程數(單位：公里)	<5	5~8	8~11	11~14	14~17	17~20	20~23	23~26	26~31	>31
票價（單位：元）	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
使用悠遊卡票價×0.8	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52

小崧使用悠遊卡搭乘捷運，搭乘里程數 x 公里 $(x<31)$ 與所付票價 $f(x)$ 元之間的關係，應該如何以函數來表示最為適當？(下列各選項中的 [ ] 皆為高斯符號)

(1) $f(x)=16+4\left[\dfrac{x}{3}\right]$

(2) $f(x)=16+4\left[\dfrac{x-2}{3}\right]$

(3) $f(x)=16+4\left[\dfrac{x-4}{3}\right]$

(4) $f(x)=16+4\left[\dfrac{x-5}{3}\right]$

(5) $f(x)=16+4\left[\dfrac{x-8}{3}\right]$

(　　　　　) 4. 下列各選項皆為區間，何者為函數 $f(x)=\log_2(16-x^2)$ 的值域？

(1) $[0, 4]$

(2) $(0, 4]$

(3) $(0, \infty)$

(4) $(-\infty, 4]$

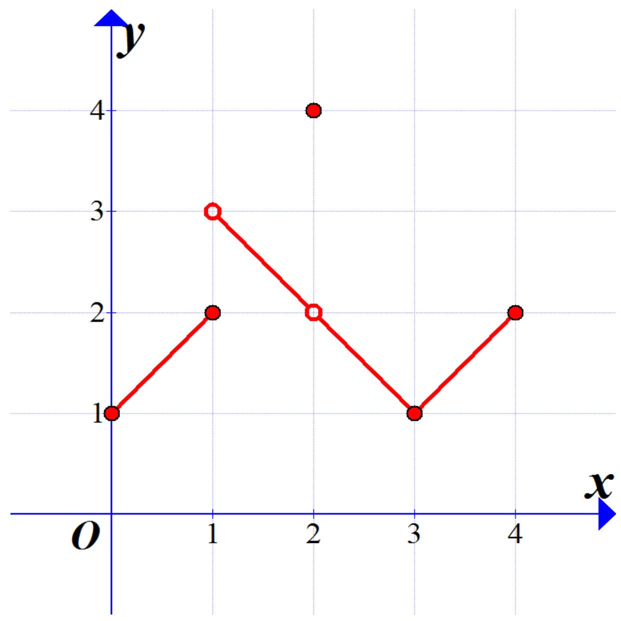
(5) $(-\infty, 4)$

二、多選題

說明：第 5 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項填寫在答案卷上。

各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

(　　　　　) 5. 設函數 $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$，下圖是 $y=f(x)$ 的函數圖形：



關於此函數 $f(x)$ 的敘述，請選出正確的選項。

(1) 在 $x=1$ 的右極限存在，且 $\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$

(2) 在 $x=2$ 的極限存在，且 $\lim_{x\to 2} f(x)=2$

(3) 此函數 $f(x)$ 在 $x=2$ 處連續

(4) 此函數 $f(x)$ 在 $x=3$ 處連續

(5) 此函數 $f(x)$ 在 $x=3.5$ 處連續。

(　　　　　) 6. 關於下列函數的運算與其定義域、值域等敘述，請選出正確的選項。

(1) 若函數 $f(x)=x^2-3x+4$ 的定義域為 $\{x\in\mathbb{R} \mid 0\le x\le 2\}$，則其值域為 $\{y\in\mathbb{R} \mid 2\le y\le 4\}$

(2) 若 $f(x)=\sqrt{x}$ 與 $g(x)=\sqrt{1-x}$，則函數 $f+g$ 的定義域為 $\{x\in\mathbb{R} \mid 0\le x\le 1\}$

(3) 若 $f(x)=x$ 與 $g(x)=\frac{1}{x}$，則函數 $f\cdot g$ 的定義域為 $\mathbb{R}$

(4) 若 $f(x)=\sqrt{x}$ 與 $g(x)=x-2$，則函數 $\frac{f}{g}$ 的定義域為 $\{x\in\mathbb{R} \mid 0\le x<2 \text{ 或} x>2\}$

(5) 若 $f(x)=\sqrt{x}$ 與 $g(x)=4-x^2$，則函數 $g\circ f$ 的定義域為 $\{x\in\mathbb{R} \mid -2\le x\le 2\}$

(　　　　　) 7. 下列關於數列與函數的極限，請選出正確的選項。

(1) 若 $f(x)=\frac{[2x]-[x]}{x}$，其中 [　] 為高斯符號，則 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在

(2) 若 $f(x)=\frac{|2x|-|x|}{x}$，則 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在

(3) 若級數 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+...+\frac{1}{n(n+2)}$，則 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在且 $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{3}{4}$

(4) 若級數 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}=1-1+1+...+(-1)^{n+1}$，則 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在且 $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$

(5) 若任意正整數 n 皆滿足 $1\le\sqrt[n]{n}\le 1+\sqrt{\frac{2}{n}}$，則可推得 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ 存在且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

三、填充題

說明：第 A 題至第 D 題，請將正確選項填寫在答案卷上。

每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設多項式函數 $f(x)=(x-10)(x-11)(x-12)+2x$，已知方程式 $f(x)=30$ 恰有一解 $x=c$，且 c 介於兩整數 k 和 $k+1$ 之間，試求此整數 $k=$？

B. 設 a, b, c 為實數，若函數 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-1}{x-1}, & x>1\\ c, & x=1\\ \frac{ax^2-b}{x-1}, & x<1\end{cases}$ 在實數系上任一點皆連續，求實數序組 $(a, b, c)=$？

C. 已知實數 a, b 滿足 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^2}-an\right)=b$，試求數對 $(a, b)=$？

D. 已知一無窮等比級數的首項為 $0.\overline{3}$，第二項為 $-0.\overline{09}$，求此無窮級數之和。

四、計算證明題

說明：本部分共有甲、乙二大題，分別配 16、12 分，答案必須寫在答案卷上指定格內，並標明子題號，超出格外不予計分，同時必須寫出演算過程或理由、**註明所引用之定理**，依步驟給分，演算過程或理由不清楚將酌予扣分。

甲、在實數線上有三動點 A, B, C，動點 A 從原點開始往正向移動，動點 B 從 4 的位置開始往負向移動。兩個動點每一秒移動一次，已知第一秒 A 移動的距離為 2，且 A 每次移動的距離為其前一次移動距離的 $\frac{1}{3}$ 倍；而 B 在第 n 秒時的位置為 $b_n=\frac{6n+4}{2n+1}$；另外，動點 C 總是介於 A、B 兩動點之間。

1. (4 分) 設在第 n 秒時，A 的位置為 a_n，請寫出 a_n 的一般項 (即以 n 來表示 a_n)；
2. (4 分) 承 1，試說明數列 $<a_n>$ 收斂，並求其極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$；
3. (4 分) 試求極限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$；
4. (4 分) 設動點 C 在第 n 秒時的位置為 c_n，試運用上面 1~3 的結果，證明 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ 存在。

乙、小崧想要計算 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-3x+2}$，但卻發現分子和分母的極限皆為 0，因此想透過因式分解求得極限：

1. (4 分) 設 $f(x)=x^3-2x+1$、$g(x)=x^2-3x+2$，請說明為何 $f(x)$ 與 $g(x)$ 皆有一次因式 $x-1$？
2. (4 分) 請寫出 $f(x)=x^3-2x+1$ 與 $g(x)=x^2-3x+2$ 的因式分解後的結果；
3. (4 分) 試運用 2 的結果求出 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-3x+2}$。

臺北市立松山高級中學 105 學年度第二學期 第一次期中考

三年級自然組 數學科答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：__________

一、單一選擇題(每題 6 分，共 4 題，共 24 分)

1	2	3	4

二、多重選擇題(每題 8 分，共 3 題，共 24 分)

5	6	7

三、填充題(每題 6 分，共 4 題，共 24 分)

A	B	C	D

四、計算證明題(甲占 16 分、乙占 12 分，共 28 分)

甲	乙

臺北市立松山高級中學 105 學年度第二學期 第一次期中考

三年級自然組 數學科答案卷

班級：＿＿＿ 座號：＿＿＿ 姓名：＿參考答案＿

一、單一選擇題(每題 6 分，共 4 題，共 24 分)

1	2	3	4
5	3	2	4

二、多重選擇題(每題 8 分，共 3 題，共 24 分)

答對選項數	5	4	3
得分	8	5	2

5	6	7
245	24	235

三、填充題(每題 6 分，共 4 題，共 24 分)

A	B	C	D
12	$(\frac{3}{2},\frac{3}{2},3)$	$(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$	$\frac{11}{42}$

四、計算證明題(甲占 16 分、乙占 12 分，共 28 分)

甲

1. 依題意，$a_n=2+2\times\frac{1}{3}+2\times(\frac{1}{3})^2+2\times(\frac{1}{3})^{n-1}$

$$=\frac{2\left(1-(\frac{1}{3})^n\right)}{1-\frac{1}{3}}=3-(\frac{1}{3})^{n-1}$$

2. 因為等比級數 a_n 之公比 $r=\frac{1}{3}$ 滿足 $-1<r<1$，所以

$<a_n>$ 收斂，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(3-(\frac{1}{3})^{n-1})=3$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+4}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6+\frac{4}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{6}{2}=3$

4. 依題意有 $a_n\le c_n\le b_n$ 且由上面 2, 3 的結果有

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，由**夾擠定理**可知 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ 存在。

乙

1. 由於 $f(1)=1^3-2\cdot1+1=0$、$g(1)=1^2-3\cdot1+2=0$，由**因式定理**可知兩者皆有 $x-1$ 之因式。

2. $f(x)=x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)$

$g(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

3. 當 x 在 1 附近但不等於 1 時，

$$\frac{x^3-2x+1}{x^2-3x+2}=\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x^2+x-1}{x-2}$$

又 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+x-1)=1^2+1-1=1$

且 $\lim\limits_{x\to1}(x-2)=-1\neq0$，極限皆存在且分母部分非 0

從而所求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-1}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^2+x-1)}{\lim\limits_{x\to1}(x-2)}$

$$=\frac{1^2+1-1}{1-2}=-1$$