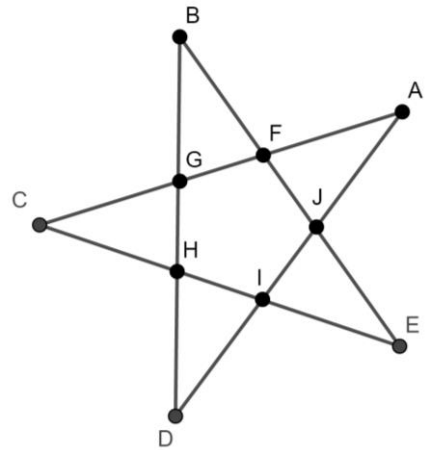


台北市立松山高中 108 學年度第一學期 期末考 高二自然組數學科試題卷

一、單選題：(每題 4 分，占 4 分)

1. 如右圖所示，在正五角星形（五芒星）中，下列內積何者最大？

- (1) $\vec{AF} \cdot \vec{HI}$ (2) $\vec{CH} \cdot \vec{HI}$ (3) $\vec{BF} \cdot \vec{HI}$
 (4) $\vec{HD} \cdot \vec{HI}$ (5) $\vec{IJ} \cdot \vec{HI}$



二、多重選擇題：

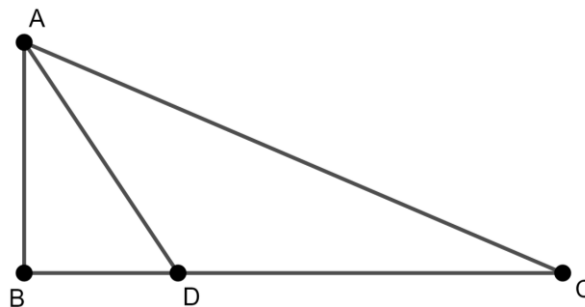
(每題 8 分，占 72 分；錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答得零分)

1. \vec{a} 、 \vec{b} 為平面上兩個相異的非零向量，下列敘述何者正確？

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{b} = \vec{0}$
 (2) $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \geq |\vec{a}| |\vec{b}|$
 (3) $|\vec{a} + \vec{b}| \geq |\vec{a}| + |\vec{b}|$
 (4) $|\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$
 (5) $|\vec{a} + t\vec{b}|$ 有最小值時， $(\vec{a} + t\vec{b}) \perp \vec{b}$

2. 如圖所示，在直角三角形 ABC 中，已知 $\angle B = 90^\circ$ ， D 點在 \overline{BC} 上，使得 $\overline{BD} = 2$ ， $\overline{DC} = 5$ ，下列敘述何者正確？

- (1) $\vec{DA} \cdot \vec{DC} = -10$
 (2) $\vec{DB} \cdot \vec{DC} = 10$
 (3) $\vec{CA} \cdot \vec{CD} = 35$
 (4) $\vec{AB} \cdot \vec{DC} = 0$
 (5) $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \vec{AD} \cdot \vec{AB}$



3. 平面上，直線 $L: \begin{cases} x=1+6t \\ y=-3+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ ，下列敘述何者正確？

(1) L 的一個法向量 $\vec{n}_L = (1, -3)$

(2) L 的一般式為 $x-3y=-10$

(3) $\begin{cases} x=1+6t \\ y=-3+2t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2$ ，表一線段，此線段上的格子點（整數解）恰有三組

(4) 設 $L_1: \begin{cases} x=s \\ y=-3s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$ ， L_1 與直線 L 垂直

(5) 設 $L_2: \begin{cases} x=1+2k \\ y=-3-k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ ， L 與 L_2 所夾銳角交角為 45 度

4. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=6$ ， $\overline{AC}=6$ ， $\overline{BC}=10$ ，設 G 為重心、 I 為內心、 H 為垂心、 O 為外心，下列敘述何者正確？

(1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -14$

(2) $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

(3) $\vec{BI} = \frac{3}{11}\vec{BA} + \frac{5}{11}\vec{BC}$

(4) $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = 14$

(5) $\vec{AO} \cdot \vec{AC} = 18$

5. \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 為平面上三個相異的非零向量，下列敘述何者正確？

(1) 若 $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{c}$ ，則 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$

(2) 若 $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{0}$ ，則 $\vec{a} \perp \vec{b}$

(3) 若 $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ ，則 $\vec{a} = \vec{b}$

(4) 若 \vec{a} 在 \vec{c} 上的正射影與 \vec{b} 在 \vec{c} 上的正射影相等，則 $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$

(5) 存在唯一的一組數對 (r, s) ，使得 $\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b}$

6. 已知 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 、 $\vec{c} = (c_1, c_2)$ 為平面上三個相異的非零向量，設 $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{c}$ ，下列關於數對 (x, y) 的敘述何者正確？

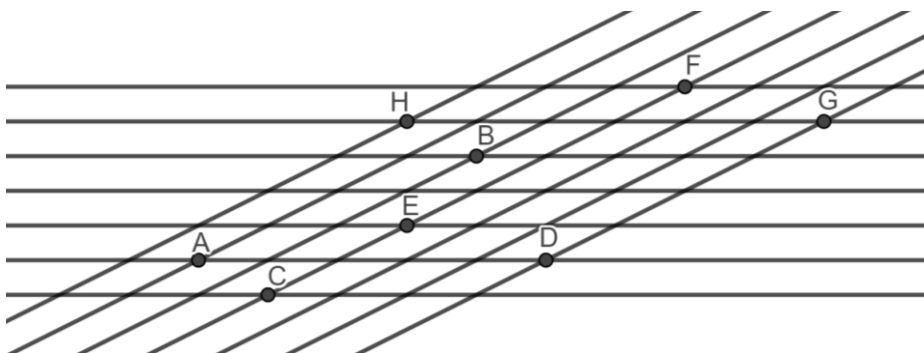
- (1) 若 $\vec{c} = \vec{0}$ ，則 (x, y) 恰有一組解 $(0, 0)$
- (2) 若 \vec{a} 、 \vec{b} 不平行，則 (x, y) 恰有一組解
- (3) 若 $\vec{a} // \vec{b}$ ，則 (x, y) 有無限多組解
- (4) 若 $\vec{a} // \vec{b}$ ，且 \vec{a} 、 \vec{c} 不平行，則 (x, y) 無解
- (5) 若 $\vec{a} // \vec{b}$ ，且 $\vec{a} // \vec{c}$ ，則 (x, y) 無解

7. 設 A 、 B 、 C 、 D 為平面上相異四點，判斷下列選項中，何者使 A 、 B 、 C 三點共線？

- (1) $\vec{AB} = \vec{BC}$ (2) $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{BD} + \frac{2}{3}\vec{CD}$ (3) $\vec{DB} = -\vec{DA} + 2\vec{DC}$
- (4) $\vec{DA} - \vec{DB} = 2\vec{CD} + 2\vec{DB}$ (5) $3\vec{DA} + 2\vec{DB} - 6\vec{DC} = \vec{0}$

8. 右圖的網格為二組兩兩平行的直線組合，且每一小格都是彼此全等的平行四邊形， A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 為平行線交點，下列敘述何者正確？

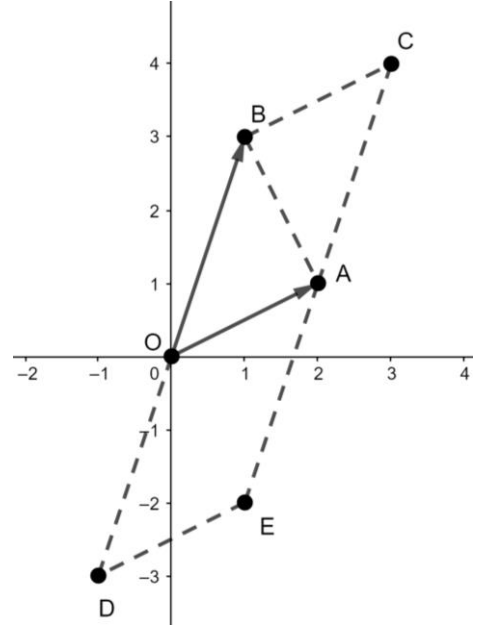
- (1) $\vec{AC} = \vec{BH}$
- (2) $\vec{AE} + \vec{FG} = \vec{AD}$
- (3) $\vec{DB} - \vec{DF} = \vec{EA}$
- (4) $\vec{EF} = 2\vec{EC}$
- (5) $\vec{FG} = \frac{5}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{EB}$



9. 已知 $O(0,0)$ ， $A(2,1)$ ， $B(1,3)$ 為坐標平面上三點，

且 $\vec{OD} = -\vec{OB}$ ， $\vec{DE} = \vec{OA} = \vec{BC}$ ，如右圖所示，

設 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$ ，下列敘述何者正確？



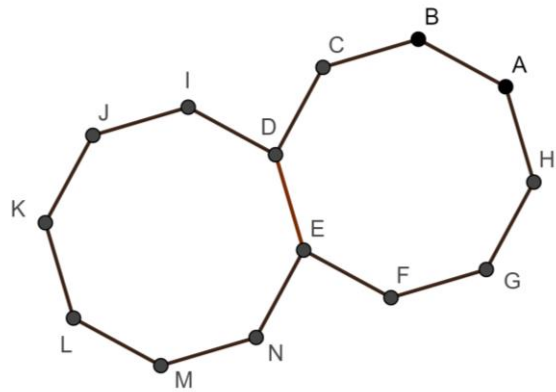
- (1) 當 $0 \leq x \leq 1$ ， $y = 1$ 時， P 點的區域為線段 \overline{AC}
- (2) 當 $x = 0$ ， $-1 \leq y \leq 0$ 時， P 點的區域為線段 \overline{DO}
- (3) 當 $0 \leq x \leq 1$ ， $0 \leq y \leq 1$ 時， P 點的區域為平行四邊形 $OACB$ 內部（含邊界）
- (4) 當 $x + y \leq 1$ ， $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ 時， P 點的區域為三角形 OAB 內部（含邊界）
- (5) 當 $-1 \leq x \leq 1$ ， $-2 \leq y \leq 2$ 時， P 點所成區域的面積為 20

三、填充題：(每格 5 分，占 15 分)

1. 右圖為由同一平面上的兩個正八邊形

所連接而成，設 $\vec{HJ} = x\vec{AB} + y\vec{BC}$ ，

求數對 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$



2. 化簡 $\begin{vmatrix} 2018a + 2019b & 2019a + 2020b \\ 2018c + 2019d & 2019c + 2020d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ，求 $k = \underline{\hspace{2cm}}$

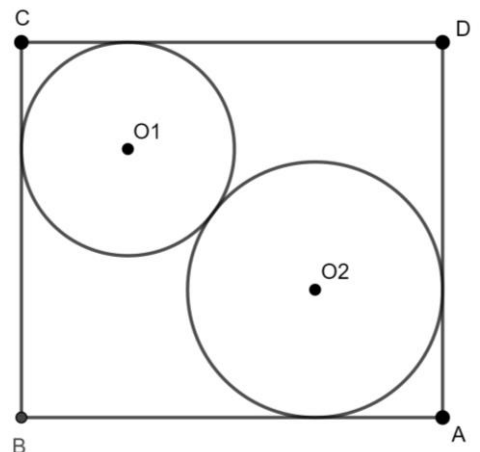
3. 平面上兩直線 $5x + 12y - 5 = 0$ 與 $3x - 4y = 0$ 的鈍角角平分線方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$

四、計算證明題：(占 9 分，請詳列計算過程，部份給分)

如右圖，在矩形 $ABCD$ 內，已知 $\overline{AB} = 9$ ， $\overline{BC} = 8$ ，圓 O_1 與 O_2

外切，並分別與矩形的兩鄰邊相切，試回答下列問題：

- (1) 求這兩圓半徑 r_1 與 r_2 之和 (即 $r_1 + r_2$) (4 分)
- (2) 利用柯西不等式，求這兩圓面積之和的最小值 (5 分)



台北市立松山高中 108 學年度第一學期 期末考 高二自然組數學科答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、單選題：(每題 4 分，占 4 分)

1.	
----	--

二、多重選擇題：

(每題 8 分，占 72 分；錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答得零分)

1.		2.		3.	
4.		5.		6.	
7.		8.		9.	

三、填充題：(每格 5 分，占 15 分)

1.		2.	
3.			

四、計算證明題：(占 9 分，請詳列計算過程，部份給分)

<p>(1) (4 分)</p>		<p>(2) (5 分) 利用<u>柯西不等式</u></p>
------------------	--	---------------------------------

台北市立松山高中 108 學年度第一學期 期末考 高二自然組數學科答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、單選題：(每題 4 分，占 4 分)

1.	2
----	---

二、多重選擇題：

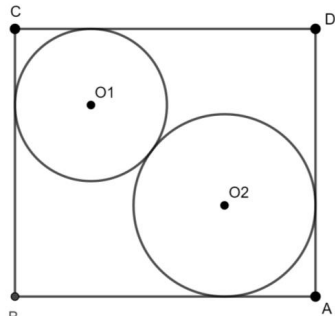
(每題 8 分，占 72 分；錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答得零分)

1.	45	2.	1345	3.	145
4.	125	5.	124	6.	24
7.	1234	8.	25	9.	234

三、填充題：(每格 5 分，占 15 分)

1.	$(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1)$	2.	-1
3.	$64x+8y-25=0$		

四、計算證明題：(占 9 分，請詳列計算過程，部份給分)

<p>(1) (4 分)</p>  <p>令 $r_1 + r_2 = x$</p> <p>$\Rightarrow (8-x)^2 + (9-x)^2 = x^2$ (2 分)</p> <p>$\Rightarrow (x-5)(x-29) = 0$ (1 分)</p> <p>$\Rightarrow x = 5$ 或 $x = 29$ (不合) (1 分)</p> <p>Ans : 5</p>	<p>(2) (5 分)</p> <p>由柯西不等式</p> <p>$\Rightarrow r_1 + r_2 \leq \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \cdot \sqrt{2}$</p> <p>$\Rightarrow r_1^2 + r_2^2 \geq \frac{25}{2}$ (3 分)</p> <p>$\Rightarrow \pi(r_1^2 + r_2^2) \geq \frac{25}{2}\pi$ (2 分)</p> <p>Ans : $\frac{25}{2}\pi$</p>
--	---

