

臺北市立松山高中 111 學年度第二學期 第一次期中考 高三 數學甲 試題卷

一、單選題：18%(每題 6 分)

1. 已知 a, b, c, d 為實數且方程式 $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 10 = 0$ 有 p 個實根與 q 個虛根，若 $2p + q = 6$ ，則 $p - q$ 的值為多少？

- (A)3 (B)1 (C)-1 (D)-3 (E)-5

2. 坐標平面上，已知點 $O(0,0)$ 、 $A(2,1)$ 、 B 、 C 、 D 、 E 是一正六邊形依逆時鐘次序的六個頂點，則 C 點在複數平面所對應的複數為何？

- (A) $(2 + i)(\cos 0 + i \sin 0)$ (B) $\sqrt{3}(2 + i)(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$ (C) $2(2 + i)(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

- (D) $2\sqrt{3}(2 + i)(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$ (E) $4(2 + i)(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$

3. 甲、乙兩人玩擲硬幣的遊戲，規定輪流投擲一枚公正硬幣，先擲出正面者獲勝，並停止遊戲。當擲出反面時，需換人擲，直到出現正面為止。若此遊戲由甲先擲，則乙獲勝的機率為多少？

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

二、多重選擇題：40%

(每題 8 分，只錯一個選項得 5 分、錯二個選項得 2 分，若是錯三個以上選項或未答者不給分)

1. 已知 z 為複數且 $z \neq 0$ ，試問下列敘述何者正確？

- (A) $|z| = |\bar{z}|$ (B) $|z| = |iz|$ (C) $\left|\frac{i}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ (D) $z^2 = z \cdot \bar{z}$ (E) $\overline{z + \bar{z}} = z + \bar{z}$

2. 已知複數 $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 為四次方程式 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ 的一根，且此方程式的 4 個根對應到複數平面

上的對應點分別為 A, B, C, D ，試問下列敘述何者正確？

- (A) 四邊形 $ABCD$ 面積為 $\sqrt{3}$

- (B) $z^{400} = 1$

- (C) $z + z^3 = z^2$

- (D) $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$

- (E) $(2 - z)(2 - z^2)(2 - z^4)(2 - z^5) = 21$

3. 同時擲兩枚公正的硬幣 35 次， X 表示這 35 次中出現兩正面的次數，將 $X = k$ 時的機率記為 p_k ，則下列敘述何者正確？

- (A) X 的期望值為 $\frac{35}{2}$ (B) X 的標準差為 $\frac{\sqrt{105}}{4}$ (C) $p_{10} = p_{25}$

- (D) 若 $p_k \geq p_{k+1}$ ，則 k 的最小值為 8 (E) $X = 18$ 的機率最大

- 4.袋中有大小相同的1顆紅球和9顆白球，每次從袋中取出一球，取後放回；令隨機變數 X 的取值表示重複試驗直到取出紅球所需的次數，將 $X = k$ 時的機率記為 $P(X = k)$ ，則下列敘述何者正確？
- (A)取球次數的期望值 $E(X) = 9$ (B)取球次數的變異數 $Var(X) = 90$
- (C)若 $Y = -2X + 3$ ，則 Y 的標準差為 $-6\sqrt{10}$ (D) $P(X \geq 5) > \frac{1}{2}$
- (E) $P(X = 100) > P(X = 101)$

5.小松宣稱手中的一枚硬幣出現正面的機率為0.75。

今檢定此硬幣出現正面的機率，並列出前三個步驟如下：

- [1]假設「此枚硬幣出現正面的機率為0.75」
 [2]確定檢定統計量為「連續投擲此枚硬幣5次中，出現正面的次數」
 [3]設定顯著水準為0.05

設隨機變數 X 表示出現正面的次數，試問下列敘述何者正確？

- (A) $X = 1$ 的機率小於0.05
 (B) $X = 5$ 的機率大於0.05
 (C)拒絕域為 $X = 1, 2$
 (D)若試驗的結果恰為2次正面，則不拒絕「此枚硬幣出現正面的機率為0.75」的假設
 (E)若將顯著水準更改為0.01，則拒絕域為 $X = 1$

三、填充題：18%(每格6分)

- 1.在複數平面上，複數 z 滿足 $|\bar{z} - 4 + i| = |iz - 3|$ ，則 $|z + 3i|$ 的最小值為_____ (A)
- 2.已知 k 為實數，若 $x^3 - 6x^2 + 9x + k = 0$ 有虛根，則 k 的範圍為_____ (B)
- 3.求 $\frac{-1024(\cos 110^\circ + i \sin 290^\circ)(\sin 70^\circ - i \cos 250^\circ)}{(\sqrt{3} + i)^9}$ 的極式（取主輻角）_____ (C)

四、計算題：24% (若無計算過程，不給分)

1.設 α 、 β 為方程式 $x^2 + ix + (-1 + i) = 0$ 的兩根。

(1)求 $\alpha^2 + \beta^2$ (6分)

(2)求 $\frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta}$ (6分)

2.設5個燈泡中含有2個不良品，每次取出1個，取後不放回，若在第 X 次時才發現第2個不良品。

(1)求 $P(X = 3)$ (4分)

(2)求 $E(X)$ (4分)

(3)求 $Var(X)$ (4分)

臺北市立松山高中 111 學年度第二學期 第一次期中考 高三 數學甲 答案卷

三年_____班 _____號 姓名_____

一、單選題：18%(每題 6 分)

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| | | |

二、多重選擇題：40%

(每題 8 分，只錯一個選項得 5 分、錯二個選項得 2 分，若是錯三個以上選項或未答者不給分)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

三、填充題：18%(每格 6 分)

| (A) | (B) | (C) |
|-----|-----|-----|
| | | |

四、計算題：24% (若無計算過程，不給分)

| 1 | 2 |
|---|---|
| | |

臺北市立松山高中 111 學年度第二學期 第一次期中考 高三 數學甲 答案卷

三年_____班 _____號 姓名_____

一、單選題：18%(每題 6 分)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| D | C | B |

二、多重選擇題：40%

(每題 8 分，只錯一個選項得 5 分、錯二個選項得 2 分，若是錯三個以上選項或未答者不給分)

| | | | | |
|------|------|----|-----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ABCE | ACDE | BD | BDE | ABD |

三、填充題：18%(每格 6 分)

| | | |
|-------------|--------------------|--|
| (A) | (B) | (C) |
| $2\sqrt{2}$ | $k < -4$ 或 $k > 0$ | $2(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$ |

四、計算題：24% (若無計算過程，不給分)

| | |
|--|-------------------------|
| 1 | 2 |
| (1) $1 - 2i$ (6 分) | (1) $\frac{1}{5}$ (4 分) |
| (2) $\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ (6 分) | (2) 4 (4 分) |
| | (3) 1 (4 分) |